Troisième, chapitre n° 10

Les systèmes d'équations

Références : 312 323 324

I. Vocabulaire

1. Une unique équation

On considère l'équation :

$$2x + 3y = 7$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à deux inconnues.

Pour résoudre l'équation, il faut trouver une valeur pour chaque inconnue.

1. Une unique équation

On considère l'équation :

$$2x + 3y = 7$$

Il s'agit d'une équation du premier degré à deux inconnues.
Pour résoudre l'équation, il faut trouver une valeur pour chaque inconnue.

Exemples

- Les valeurs $x = 4$ et $y = 5$ ne sont pas des solutions de l'équation.
  En effet : $2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23 \neq 7$
- Les valeurs $x = 2$ et $y = 1$ sont des solutions de l'équation.
  En effet :$2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7$
- Les valeurs $x = 5$ et $y = -1$ sont aussi des solutions de l'équation.
  En effet : $2 \times 5 + 3 \times (-1) = 10 - 3 = 7$

2. Plusieurs équations

Dans les problèmes classiques, il y a souvent plusieurs équations à résoudre en même temps.

On appelle cela un <u>système d'équations</u>.

2. Plusieurs équations

Dans les problèmes classiques, il y a souvent plusieurs équations à résoudre en même temps.
On appelle cela un <u>système d'équations</u>.

`Définition` – Résoudre un système d'équations du <u>premier degré</u> à <u>deux inconnues</u>, c'est chercher tous les couples de valeurs vérifiant plusieurs équations en même temps.

2. Plusieurs équations

Dans les problèmes classiques, il y a souvent plusieurs équations à résoudre en même temps.
On appelle cela un <u>système d'équations</u>.

`Définition` – Résoudre un système d'équations du <u>premier degré</u> à <u>deux inconnues</u>, c'est chercher tous les couples de valeurs vérifiant plusieurs équations en même temps.

`Exemple` – On considère le système d'équations :

2. Plusieurs équations

Dans les problèmes classiques, il y a souvent plusieurs équations à résoudre en même temps.
On appelle cela un système d'équations.

`Définition` – Résoudre un système d'équations du premier degré à deux inconnues, c'est chercher tous les couples de valeurs vérifiant plusieurs équations en même temps.

`Exemple` – On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

- Les valeurs $x = 4$ et $y = 5$ ne sont pas des solutions de l'équation.

- Les valeurs $x = 4$ et $y = 5$ ne sont pas des solutions de l'équation.

$$\begin{cases} 2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23 \neq 7 \\ 4 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16 \neq 9 \end{cases}$$

- Les valeurs $x = 2$ et $y = 1$ ne sont pas des solutions de l'équation.

- Les valeurs $x = 4$ et $y = 5$ ne sont pas des solutions de l'équation.

$$\left\{\begin{array}{r} 2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23 \neq 7 \\ 4 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16 \neq 9 \end{array}\right.$$

- Les valeurs $x = 2$ et $y = 1$ ne sont pas des solutions de l'équation.

$$\left\{\begin{array}{r} 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7 \\ 2 - 4 \times 1 = 2 - 4 = -2 \neq 9 \end{array}\right.$$

- Les valeurs $x = 5$ et $y = -1$ sont des solutions de l'équation.

- Les valeurs $x = 4$ et $y = 5$ ne sont pas des solutions de l'équation.

$$\begin{cases} 2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23 \neq 7 \\ 4 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16 \neq 9 \end{cases}$$

- Les valeurs $x = 2$ et $y = 1$ ne sont pas des solutions de l'équation.

$$\begin{cases} 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7 \\ 2 - 4 \times 1 = 2 - 4 = -2 \neq 9 \end{cases}$$

- Les valeurs $x = 5$ et $y = -1$ sont des solutions de l'équation.

$$\begin{cases} 2 \times 5 + 3 \times (-1) = 10 - 3 = 7 \\ 5 - 4 \times (-1) = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

II. Méthode graphique

Une équation du premier degré à deux inconnues correspond presque toujours à une fonction affine. On peut donc tracer sa droite représentative.

Avec un système d'équations, on trace les droites représentatives de chaque équation, puis on regarde le point d'intersection.

Une équation du premier degré à deux inconnues correspond presque toujours à une fonction affine. On peut donc tracer sa droite représentative.

Avec un système d'équations, on trace les droites représentatives de chaque équation, puis on regarde le point d'intersection.

`Exemple` – On considère le système d'équations :

Une équation du premier degré à deux inconnues correspond presque toujours à une fonction affine. On peut donc tracer sa droite représentative.

Avec un système d'équations, on trace les droites représentatives de chaque équation, puis on regarde le point d'intersection.

`Exemple` – On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$$

D'abord, on isole la seconde inconnue :

Une équation du premier degré à deux inconnues correspond presque toujours à une fonction affine. On peut donc tracer sa droite représentative.

Avec un système d'équations, on trace les droites représentatives de chaque équation, puis on regarde le point d'intersection.

`Exemple` – On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$$

D'abord, on isole la seconde inconnue :

$$\begin{cases} 2y = 8 - 4x \\ 3y = -6 - 3x \end{cases}$$

Ensuite, on fait apparaitre les fonctions affines f_1 et f_2 :

Ensuite, on fait apparaitre les fonctions affines f_1 et f_2 :

$$\begin{cases} y = \frac{8}{2} - \frac{4}{2}x = 4 - 2x = f_1(x) \\ y = \frac{-6}{3} - \frac{3}{3}x = -2 - x = f_2(x) \end{cases}$$

On trace les deux droites représentatives : on peut lire une valeur aprochée du couple de solutions, au point d'intersection des droites.

On vérifie que ces valeurs sont bien les solutions du système d'équations :

On trace les deux droites représentatives : on peut lire une valeur aprochée du couple de solutions, au point d'intersection des droites.

On vérifie que ces valeurs sont bien les solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(6) = 4 - 2 \times 6 = 4 - 12 = -8 \\ f_2(6) = -2 - 6 = -2 - 6 = -8 \end{array}\right.$$

On trace les deux droites représentatives : on peut lire une valeur aprochée du couple de solutions, au point d'intersection des droites.

On vérifie que ces valeurs sont bien les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} f_1(6) = 4 - 2 \times 6 = 4 - 12 = -8 \\ f_2(6) = -2 - 6 = -2 - 6 = -8 \end{cases}$$

`Remarque` – Les valeurs trouvées par lecture graphique sont souvent très approximatives - parfois, il est même difficile de faire une figure.

Il faut donc une autre méthode pour trouver les solutions.

III. Méthode par substitution

La méthode par substitution prolonge l'interprétation graphique. Une fois que l'on dispose de nos deux fonctions affines f_1 et f_2, on résoud l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

La méthode par substitution prolonge l'interprétation graphique. Une fois que l'on dispose de nos deux fonctions affines f_1 et f_2, on résoud l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

`Exemple` – Reprenons le système précédent.

$$f_1(x) = -2x + 4 \qquad f_2(x) = -x - 2$$

L'équation $f_1(x) = f_2(x)$ donne :

La méthode par substitution prolonge l'interprétation graphique. Une fois que l'on dispose de nos deux fonctions affines f_1 et f_2, on résoud l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

`Exemple` – Reprenons le système précédent.

$$f_1(x) = -2x + 4 \qquad f_2(x) = -x - 2$$

L'équation $f_1(x) = f_2(x)$ donne :

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= -x - 2 \\ -2x + x &= -4 - 2 \\ -x &= -6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Enfin, on remplace x par sa valeur :

La méthode par substitution prolonge l'interprétation graphique. Une fois que l'on dispose de nos deux fonctions affines f_1 et f_2, on résoud l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

`Exemple` – Reprenons le système précédent.

$$f_1(x) = -2x + 4 \qquad f_2(x) = -x - 2$$

L'équation $f_1(x) = f_2(x)$ donne :

$$-2x + 4 = -x - 2$$

$$-2x + x = -4 - 2$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

Enfin, on remplace x par sa valeur :
$y = f_1(6) = -2 \times 6 + 4 = -12 + 4 = -8$

$\boxed{\text{Le couple de solutions est } (6; -8).}$

IV. Méthode par combinaison