

Troisième, chapitre n° 3

Synthèse sur le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès fait le lien entre calculs fractionnaires et parallélismes des droites. On aborde aussi son application aux agrandissements et aux réductions.

I. Proportionnalité

1. Le théorème de Thalès

On considère deux droites (AM) et (BN) sécantes en O .

Configuration n° 1

Configuration n° 2

Si (AB) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$.

2. Exemple n° 1

Sur la figure :

- $OA = 3\text{ cm}$, $OB = 2\text{ cm}$, $AB = 4\text{ cm}$ et $OM = 9\text{ cm}$.
- (AB) et (MN) sont parallèles.

Calculer les longueurs BN et MN .

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \dots = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \dots = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = ON - OB = \dots = \dots$

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = ON - OB = 6 - 2 = \dots\dots$

▶ $MN = \dots\dots = \dots\dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = ON - OB = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$.

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = ON - OB = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$.

▶ $MN = \frac{4 \times 9}{3} = \dots\dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{3}{9} = \frac{2}{ON} = \frac{4}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \text{ cm}$. Donc $BN = ON - OB = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$.

▶ $MN = \frac{4 \times 9}{3} = 12 \text{ cm}$.

3. Exemple n° 2

Sur la figure :

- $OA = 6 \text{ cm}$, $OB = 4 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$ et $OM = 3 \text{ cm}$.
- De plus, (AB) et (MN) sont parallèles.

Calculer les longueurs BN et MN .

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \dots = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \dots = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = \dots$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$.

▶ $MN = \dots = \dots$.

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = \dots = \dots = \dots$

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = ON + OB = \dots = \dots$

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = ON + OB = 2 + 4 = \dots\dots$

▶ $MN = \dots\dots = \dots\dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = ON + OB = 2 + 4 = 6 \text{ cm}$.

▶ $MN = \dots = \dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = ON + OB = 2 + 4 = 6 \text{ cm}$.

▶ $MN = \frac{3 \times 8}{6} = \dots\dots$

On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{6}{3} = \frac{4}{ON} = \frac{8}{MN}$$

On applique les produits en croix :

▶ $ON = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$. Donc $BN = ON + OB = 2 + 4 = 6 \text{ cm}$.

▶ $MN = \frac{3 \times 8}{6} = 4 \text{ cm}$.

II. Parallélisme

1. La réciproque théorème de Thalès

On considère deux droites (AM) et (BN) sécante en O .

Configuration n° 1

Configuration n° 2

Si $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$, alors (AB) et (MN) sont parallèles.

Remarques

- ▶ Ce théorème n'utilise que deux fractions.
- ▶ Ce théorème est tout le contraire du précédent.
Cette fois, on cherche à prouver que deux droites sont parallèles, et non pas à calculer une longueur.

2. Exemple n° 1

Sur la figure, $OA = 3 \text{ cm}$, $OB = 2 \text{ cm}$, $OM = 6 \text{ cm}$ et $ON = 4 \text{ cm}$.

Prouver que (AB) et (MN) sont parallèles.

On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \dots = \dots \qquad \frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi, $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{6} = \dots \qquad \frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi, $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi, $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{OB}{ON} = \frac{2}{4} = \dots$$

Ainsi, $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{OB}{ON} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Ainsi, $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

3. Exemple n° 2

Sur la figure, $OA = 4 \text{ cm}$, $OB = 5 \text{ cm}$, $OM = 24 \text{ cm}$, $ON = 15 \text{ cm}$ et $AB = 3 \text{ cm}$.

Calculer la longueur MN .

Etape n° 1 - On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \dots = \dots \qquad \frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Etape n° 1 - On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{4}{24} = \dots \qquad \frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Etape n° 1 - On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{4}{24} = \frac{1}{3} \qquad \frac{OB}{ON} = \dots = \dots$$

Ainsi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Etape n° 1 - On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{4}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{OB}{ON} = \frac{5}{15} = \dots$$

Ainsi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Etape n° 1 - On applique la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{4}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{OB}{ON} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Ainsi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \dots\dots\dots$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{3}{MN}$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \dots = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{3}{MN}$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \frac{3 \times 3}{1} = \dots$$

Etape n° 2 - On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{3}{MN}$$

On applique le produit en croix :

$$MN = \frac{3 \times 3}{1} = 9 \text{ cm}$$

III. Agrandissement et réduction

1. Agrandissement

Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k > 1$ appelée coefficient d'agrandissement.

Exemple

Considérons un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 3 cm.

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 2$.

Le nouveau rectangle a pour dimension :

- ▶ Longueur : = cm.
- ▶ Largeur : = cm.

1. Agrandissement

Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k > 1$ appelée coefficient d'agrandissement.

Exemple

Considérons un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 3 cm.

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 2$.

Le nouveau rectangle a pour dimension :

- ▶ Longueur : $2 \times 7 = \dots$ cm.
- ▶ Largeur : $\dots = \dots$ cm.

1. Agrandissement

Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k > 1$ appelée coefficient d'agrandissement.

Exemple

Considérons un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 3 cm.

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 2$.

Le nouveau rectangle a pour dimension :

- ▶ Longueur : $2 \times 7 = 14$ cm.
- ▶ Largeur : = cm.

1. Agrandissement

Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k > 1$ appelée coefficient d'agrandissement.

Exemple

Considérons un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 3 cm.

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 2$.

Le nouveau rectangle a pour dimension :

- ▶ Longueur : $2 \times 7 = 14$ cm.
- ▶ Largeur : $2 \times 3 = \dots$ cm.

1. Agrandissement

Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k > 1$ appelée coefficient d'agrandissement.

Exemple

Considérons un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 3 cm.

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 2$.

Le nouveau rectangle a pour dimension :

- ▶ Longueur : $2 \times 7 = 14$ cm.
- ▶ Largeur : $2 \times 3 = 6$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

▶ $A'B' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.

▶ $B'C' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.

▶ $A'C' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm.
On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = \dots$ cm.
- ▶ $B'C' = \dots = \dots$ cm.
- ▶ $A'C' = \dots = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = 1,2$ cm.
- ▶ $B'C' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.
- ▶ $A'C' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = 1,2$ cm.
- ▶ $B'C' = 0,2 \times 4 = \dots$ cm.
- ▶ $A'C' = \dots = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = 1,2$ cm.
- ▶ $B'C' = 0,2 \times 4 = 0,8$ cm.
- ▶ $A'C' = \dots\dots\dots = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = 1,2$ cm.
- ▶ $B'C' = 0,2 \times 4 = 0,8$ cm.
- ▶ $A'C' = 0,2 \times 3 = \dots$ cm.

2. Réduction

Pour réduire une figure, on multiplie toutes les longueurs par une valeur positive $k < 1$ appelée coefficient de réduction.

Exemple

Considérons un triangle ABC de longueurs $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On lui applique un coefficient de réduction de $k = 0,2$.

Le nouveau triangle, noté $A'B'C'$, a pour longueurs :

- ▶ $A'B' = 0,2 \times 6 = 1,2$ cm.
- ▶ $B'C' = 0,2 \times 4 = 0,8$ cm.
- ▶ $A'C' = 0,2 \times 3 = 0,6$ cm.

3. Propriétés

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k ,

- ▶ Les angles sont conservés.
- ▶ Les surfaces sont multipliées par k^2 .
- ▶ Les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple

Considérons un losange d'aire 8 cm^2 .

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 5$.

L'aire du nouveau losange est :

..... = cm^2

3. Propriétés

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k ,

- ▶ Les angles sont conservés.
- ▶ Les surfaces sont multipliées par k^2 .
- ▶ Les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple

Considérons un losange d'aire 8 cm^2 .

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 5$.

L'aire du nouveau losange est :

$$5^2 \times 8 = \dots \text{ cm}^2$$

3. Propriétés

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k ,

- ▶ Les angles sont conservés.
- ▶ Les surfaces sont multipliées par k^2 .
- ▶ Les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple

Considérons un losange d'aire 8 cm^2 .

On lui applique un coefficient d'agrandissement de $k = 5$.

L'aire du nouveau losange est :

$$5^2 \times 8 = 200 \text{ cm}^2$$

4. Cas particulier

Configuration n° 1

Configuration n° 2

Considérons deux triangles OAB et OMN , disposés dans une configuration de Thalès, avec $(AB) \parallel (MN)$, $A \in (OM)$ et $B \in (ON)$.

Dans ce cas :

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$$

On peut dire que le triangle OAB est un agrandissement (ou une réduction) du